Ecole Nationale des Sciences

Appliquées d'Al Hoceima

Morad Aaboud

Electrostatique & Magnétostatique

CP: AP1

2018-2019

Table des matières

CHAPITRE 0

Compléments de Mathématiques

- **I- Grandeurs physiques et système d'unité**
- **II- champ**
- **III- Système de coordonnées**
- **IV- Opérateurs**
- **V- Théorème de la divergence**
- **VI- Théorème du rotationnel**
- **VII- Exercices d'application**

CHAPITRE 1

Electrostatique & Généralités & Loi de Coulomb

- **I- Introduction**
- **II- L'électrisation**
- **III- Charge électrique**
- **IV- Force de Coulomb**
- **V- Exercices d'application**

CHAPITRE 2

Potentiel électrique & Champ électrique

- **I- Champ électrique**
- **II- Propriétés de symétrie du champ électrique**
- **III- Circulation d'un champ de vecteur**
- **IV- Potentiel électrique**
- **V- Surfaces équipotentiels**
- **VI- Exercice d'application**

CHAPITRE 3

Théorème de Gauss

- **I- Flux du champ électrique**
- **II- Théorème de Gauss**
- **III- Applications**
- **IV- Loi locale et loi intégrale**
- **V- Equations de Poisson et de la Place**

CHAPITRE 4

Conducteur en équilibre

- **I- Introduction**
- **II- Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique**
- **III- Champ au voisinage d'un conducteur**
- **IV- Pouvoir des pointes**
- **V- Pression électrostatique**
- **VI- Capacité d'un conducteur isolé**
- **VII- Influence**
- **VIII- Système de conducteurs en équilibre**
- **IX- Les condensateurs**
- **X- Energie électrostatique**

Chapitre 0

Compléments de Mathématiques

I-Grandeurs physiques et système d'unité
I-1-Généralités

Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui se rapporte à une propriété physique.
Elle peut être de différente nature :

- scalaires: sont entièrement définies par un nombre. Lorsque la mesure d'une grandeur physique s'exprime par un simple nombre, on parle d'une grandeur scalaire.

Exemples: La masse, le temps, la pression... Ces grandeurs n'ont pas de direction.

- scalaire algébrique: (associé à une orientation) comme la composante de vitesse ...

- complexe: comme par exemple l'impédance complexe d'un dipôle linéaire.

- vectorielle: est une quantité spécifiée par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur. On peut citer comme grandeurs vectorielles: La vitesse, la force, le champ électrique...

I-2-Unités

Le système des unités international (SI) comprend :

a) des unités fondamentales (7 unités):

Grandeurs (unité SI): Longueur (m), Masse (Kg), Temps (s), Intensité (A), Température (K), Quantité de matière (mol), Intensité lumineuse (cd).

b) des unités dérivées définies à partir des unités fondamentales, comme par exemple:
Vitesse ($m.s^{-1}$), Accélération ($m.s^{-2}$) ...

c) des unités hors système comme par exemple :
1 radian = 180/π et 1 atmosphère = $1.013.\ 10^{5}$ Pa.

II- Champ

En Physique, on définit un champ de scalaires ou un champ de vecteurs lorsque l'on associe à chaque point d'une région de l'espace une grandeur scalaire ou vectorielle.

II-1 Définition

Champ de scalaires: C'est une fonction scalaire de plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un scalaire U(x, y, z).

Exemple: Température en chaque point d'une pièce.

Champ de vecteurs: C'est une fonction vectorielle de plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un vecteur $\vec{V}(x, y, z)$

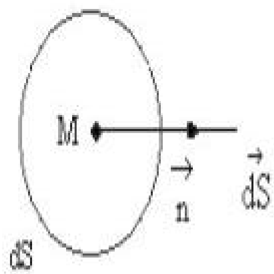
Exemple: Champ électrique.

II-2 Flux d'un champ de vecteur
II-2-1 Orientation d'une surface

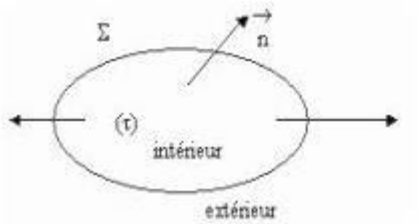
On représente vectoriellement un élément de surface *dS* autour d'un point M par un vecteur dont:

- La valeur est l'aire *dS*
- La direction est la normale à l'élément *dS* en M
- Le sens positif choisi est repéré par un vecteur unitaire porté par cette normale et dépend de la configuration de la surface considérée. Le vecteur élément de surface orientée s'écrit:

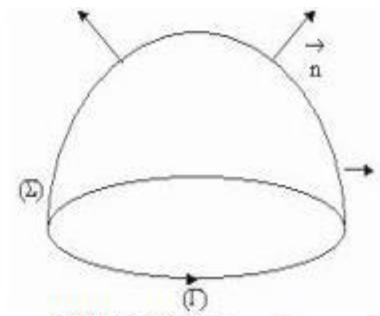
$\overrightarrow{ds} = ds.\vec{n}$



Pour une surface fermée $\sum$ délimitant un volume τ, $\vec{n}$ est orienté très souvent de l'intérieur vers l'extérieur.
Pour une surface ouverte, on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite : Le pouce donne le sens de la normale si les autres doigts sont fermés dans le sens de parcours du contour.



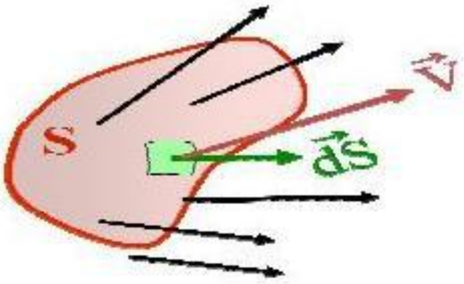
Surface fermée



Surface ouverte

II-2-2 flux d'un vecteur

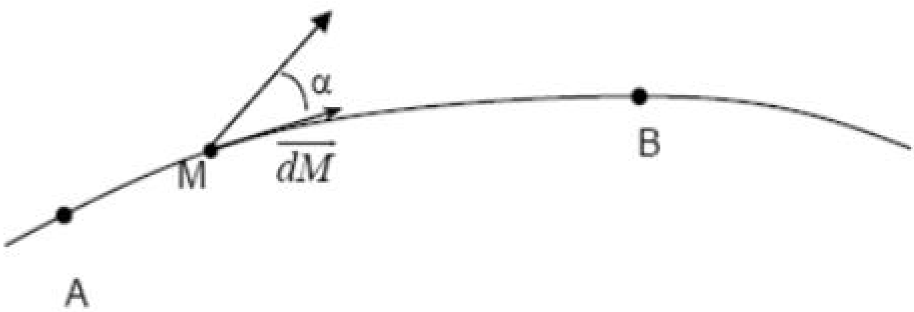
Le flux Φ d'un champ de vecteur $\vec{V}$ à travers la surface S est donné par l'intégrale sur toute la surface S du produit scalaire de $\vec{V}$ avec le vecteur $\overrightarrow{dS}$ représentant un élément de surface infinitésimal: $\phi = \iint_S \vec{V}.\overrightarrow{dS}$



II-3 Circulation d'un vecteur
II-3-1 Définition

Soit un arc AB sur une courbe C parcouru par un point M dans un certain sens. Soit $\vec{V}$ un vecteur. On appelle circulation du vecteur $\vec{V}$ le long de l'arc AB la valeur de l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{V}\overrightarrow{dM}$

$\overrightarrow{dM}$: est le vecteur tangent à la courbe C au point M.
Si le chemin est fermé: la circulation du vecteur $\vec{V}$ est $C = \oint \vec{V}.\overrightarrow{dM}$



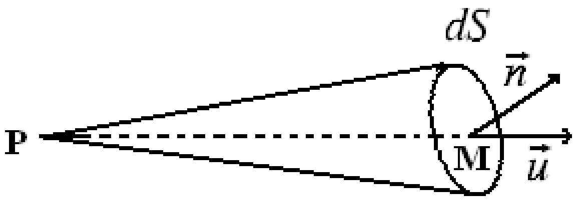
- Circulation élémentaire $dC = \vec{V}.\overrightarrow{dM}$

Par exemple, si le vecteur est une force, la circulation n'est autre que le travail.

II-4 **Angle Solide**

La notion d'angle solide est **l'extension naturelle** dans **l'espace** de **l'angle** défini dans un **plan**. **L'angle solide élémentaire** noté $d\Omega$ sous lequel, depuis un point P, on voit **l'élément de surface** dS entourant un point M, d'unitaire normal $\vec{n}$ est définie par :

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$



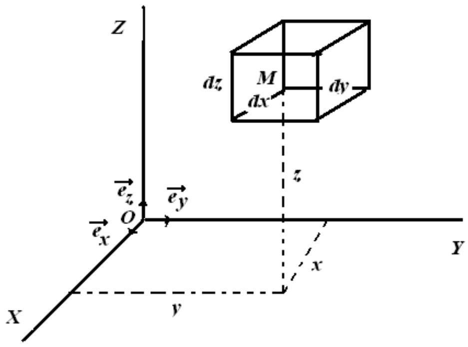
r est la distance entre les deux points P et M.
Ainsi l'angle solide Ω sous lequel, depuis P, on voit la surface (Σ) est :

$$\Omega = \iint_{\Sigma} d\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}.dS$$

L'angle solide est exprimé en **stéradian** noté **(sr).**

III. Systèmes de coordonnées

III.1. Coordonnée cartésiennes (x,y,z)

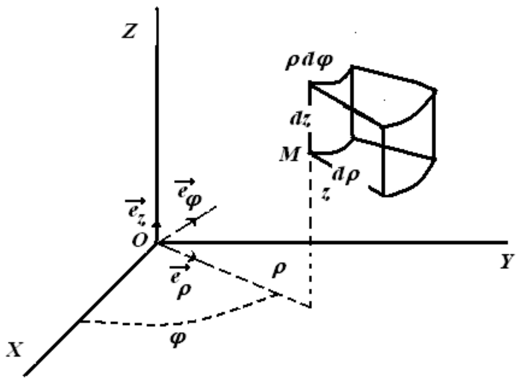


Les axes sont perpendiculaires et portent les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

Le tableau regroupe les coordonnées q d'un point M, leurs accroissements dq, les longueurs (dl), surfaces (dS) et volumes élémentaires ($d\tau$) ainsi que les vecteurs unitaires $\vec{e}$

q	dq	dl	dS	$d\tau$
x y z	dx dy dz	dx dy dz	dydz dxdz dxdy	dxdydz

III.2. Coordonnée cylindriques (ρ, φ, z)



Les vecteurs unitaires des trois directions sont $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

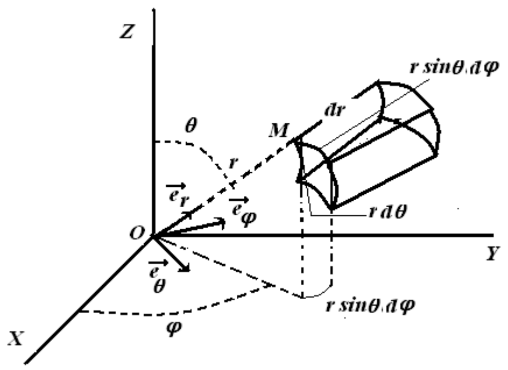
q	dq	dl	dS	$d\tau$
ρ φ z	$d\rho$ $d\varphi$ dz	$d\rho$ $\rho d\varphi$ dz	$\rho d\varphi dz$ $dzd\rho$ $\rho d\varphi d\rho$	$\rho d\varphi d\rho dz$

Le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes se fait selon la transformation suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = \rho sin\varphi} \end{cases}$$

Avec φ variant entre $\boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{2\pi}$.

III.3. Coordonnée sphériques (r, ϑ, φ)



Les vecteurs unitaires des trois directions sont $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

q	dq	dl	dS	$d\tau$
r ϑ φ	dr $d\vartheta$ $d\varphi$	dr $rd\vartheta$ $r\sin\vartheta\, d\varphi$	$r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ $r\sin\vartheta\, d\varphi\, dr$ $r\, dr\, d\vartheta$	$r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes se fait selon la transformation suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = rsin\theta cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = rsin\theta sin\varphi} \\ \boldsymbol{z = rcos\theta} \end{cases}$$

Avec $\boldsymbol{\theta}$ variant entre $\boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\pi}$ et φ variant entre $\boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{2\pi}$.

III-4 Exemples d'application (calcule des surfaces et des volumes).

1- **La circonférence (le périmètre) d'un disque de rayon R.**

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées polaire (ρ, θ). Alors, un élément de longueur du périmètre *dl* s'écrit :

$$dl = Rd\theta$$

La circonférence L est la somme de tous les éléments de longueur *dl*

$$L = \int dl = \int_0^{2\pi} Rd\theta = R[\theta]_0^{2\pi} = \boldsymbol{2\pi R}$$

2- La surface latérale d'un cylindre de rayon *R* et de hauteur h.

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). Alors, un élément de surface dS s'écrit :

$$dS = \rho d\theta . dz \quad \text{avec} \quad \rho = R = cte$$

La surface latérale S_{lat} est la somme de tous les éléments de surface dS :

$$S_{lat} = \iint dS = \iint R d\theta . dz$$

Avec θ variant entre 0 et 2π, z variant entre 0 et h. Donc :

$$S_{lat} = R \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^h dz = R[\theta]_0^{2\pi} . [z]_0^h = \boldsymbol{2\pi R h}$$

3- Le volume d'un cylindre de rayon *R* et de hauteur h.

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). Alors, un élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$d\tau = \rho d\rho . d\theta . dz$$

Le volume V est la somme de tous les éléments de volume $d\tau$: $V = \iiint d\tau$

$$V = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^h dz = [\rho^2/2]_0^R . [\theta]_0^{2\pi} . [z]_0^h = \boldsymbol{\pi R^2 h}$$

IV. Opérateurs

Soit $\vec{A}$ un **vecteur** et f une **fonction scalaire**, les opérateurs **gradient, divergence, rationnel, laplacien et laplacien vectoriel** leur font correspondre des grandeurs **vectorielles ou scalaires** :

Gradient : Le gradient **d'une fonction scalaire** noté $\overrightarrow{grad}(f)$ **est un vecteur** qui a pour coordonnées cartésien

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Laplacien : Le laplacien **d'une fonction scalaire** noté Δf **est un scalaire**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence : La divergence **d'un vecteur** noté $div(\vec{A})$ **est un scalaire**

$$div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel : Le rotationnel **d'un vecteur** noté $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$ **est un vecteur** qui a pour coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

__Laplacien vectoriell :__ Le Laplacien vectoriel **__d'un vecteur__** noté $\vec{\Delta}(\vec{A})$ **__est un vecteur__** qui a pour coordonnées cartésiennes

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

IV.1. Opérateurs nabla

L'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ est un pseudo-vecteur de composantes

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Facilite l'écriture des différents opérateurs ainsi : $\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f$, $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$, $div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A}$, $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et $\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

IV.2. Relations entre opérateurs

$df = \overrightarrow{grad}(f).\vec{dl}$

$div\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$

$\overrightarrow{grad}(fg) = g.\overrightarrow{grad}(f) + f.\overrightarrow{grad}(g)$

$\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{A} + f.\overrightarrow{rot}(\vec{A})$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{0}$

$div(\overrightarrow{grad}(f)) = \Delta f$

$div(f.\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(f).\vec{A} + f.div(\vec{A})$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$

V. Théorème de la divergence (d'Ostrogradski)

A condition que les composantes du vecteur et leurs dérivées soient continues dans les deux domaines d'intégration, le volume τ et la surface Σ qui le limite, on a :

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}.d\vec{S} = \iiint_{\tau} div(\vec{A}).d\tau$$

VI. Théorème du rotationnel (de Stockes ou Ampère)

Avec les mêmes conditions que ceux du théorème d'Ostrogradsky sur la surface Σ et le contour C qui l'entoure on a :

$$\int_{C} \vec{A}.d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\vec{A}).d\vec{S}$$

IV. Exercices d'application

Exercices 0.1.

Soient deux point $A(a, c, 0)$ et $B(b, d, 0)$ d'un référentiel $R(O; x, y, z)$ les quantités a, b, c et d sont des constantes positives. Un champ de vecteur $\overrightarrow{F} = -Kx\overrightarrow{e_x} + \frac{K'}{y^2}\overrightarrow{e_y}$, avec K et K' sont des constantes positives.

1. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dans le déplacement de :
   (a) $A(a, c, 0)$ à $B(b, d, 0)$;
   (b) $B(b, d, 0)$ à $A(a, c, 0)$;
   (c) Le long d'un contour fermé ABA;
2. Conclusion.

Exercices 0.2.

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$.

1. Déterminer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de la courbe $r = a(1 + cos\theta)$, lorsque θ passe de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$.

Exercices 0.3.

Calculer les dérivées partielles et le gradient de $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1$ et $g(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Exercices 0.4.

On considère une fonction scalaire $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ et un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{dr}) = \theta$.

1. Établir la relation $df = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dr}$;
2. Déduire de la premier question la fonction: $\frac{df}{dr}$.

Exercices 0.5.

On donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2}$, $|\overrightarrow{e_r}| = 1$.

1. Montrer que $\overrightarrow{V}$ est un gradient;
2. Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$;
3. Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{V}$.

Exercices 0.6.

Calculer le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ à travers la surface totale de l'hémisphère de rayon a: $\overrightarrow{V} = xz^2\overrightarrow{i} + (x^2y - z^3)\overrightarrow{j} + (y^2z + 2xy)\overrightarrow{k}$.

remarque : utiliser le théorème de la divergence.

Exercices 0.7.

Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = 2y\overrightarrow{i} + 3x\overrightarrow{j} - z^2\overrightarrow{k}$ le long du contour (C) sur lequel s'appuie l'hémisphère de rayon $R = 3$.

remarque : utiliser le théorème du rotationnel.

Chapitre 1

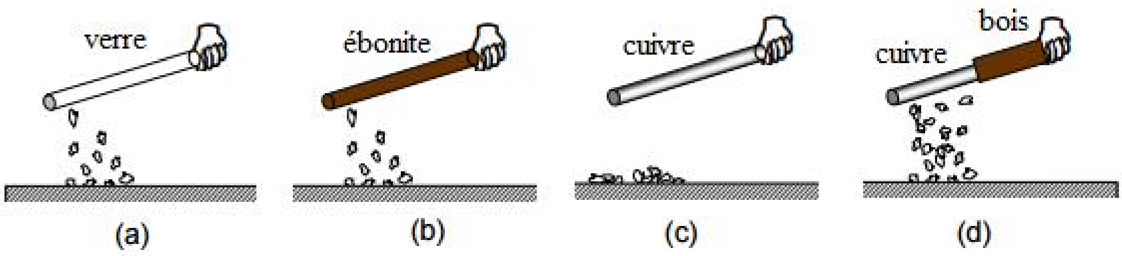
Electrostatique & Généralités & Loi de Coulomb

I. Introduction

L'électrostatique, branche de **l'électromagnétisme** qui étudie les charges électriques **immobiles** et leur **interaction**. Les phénomènes électrostatiques d'attraction et de répulsion, obtenus en frottant de **l'ambre *(résines fossilisée)*** ou d'autres **substances vitreuses**, étaient connus dès la haute Antiquité. Ils sont notamment cités par les philosophes grecs **Thalès** (VIe siècle av. J.-C.) et **Théophraste** (IVe-IIIe siècle av. J.-C.). Mais ce n'est qu'en 1600 que le physicien anglais **William Gilbert** publia une première analyse méthodique, proposant le terme **« électrique »** (du grec **élektron, « ambre »**) pour décrire la force engendrée par ces **corps vitreux**. C'est à cette époque que le mot **« statique »** est apparu pour désigner les phénomènes faisant l'objet de ce cours.

II. L'électrisation

II.1. Electrisation par frottement



Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier (figure a). On dit que le verre a été électrisé, ce phénomène est appelé électrisation et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est l'électricité.

On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite et si on répète la même opération (figure b)

Si on essaie d'électriser, comme précédemment, une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure c). La tige en métal, tenue à la main, n'exerce aucune force sur les morceaux de papier. Par contre si on tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, la tige métallique électrisée, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure d).

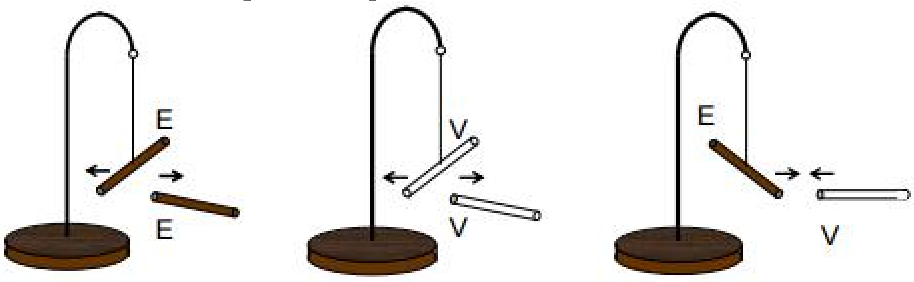
Interprétation de ces expériences : On attribue cette propriété, qu'acquiert la matière et qui lui permet d'exercer une force, à l'existence de **charges électriques q**. Dans le cas du verre et de l'ébonite, ces expériences montrent que les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Le verre et l'ébonite sont des **isolants** électriques.

Par contre les charges dues à l'électrisation se déplacent dans les métaux et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. C'est la raison pour laquelle on ne constate aucun effet de l'électrisation dans l'expérience de la figure c. Les métaux sont des corps **conducteurs** d'électricité.

Dans la quatrième expérience, le manche en bois, qui est un **isolant**, empêche l'écoulement des charges électriques. Néanmoins celles-ci se répandent sur toute la surface du métal.

II.2. Les deux types d'électricité

Les pendules, représentés sur les figures ci-dessous, sont constitués d'une potence, fixée sur un socle en bois, à laquelle est relié un fil de soie sans torsion. Suspendons, en son milieu, un bâton d'ébonite dont une extrémité a été électrisée par frottement. Approchons de cette extrémité la partie électrisée, par la même méthode, d'un second bâton d'ébonite. L'interaction de ces parties électrisées se traduit par une répulsion.



Répulsion et attraction entre corps électrisés

Répétons la même expérience, en remplaçant les bâtons d'ébonite par des tiges de verre électrisées comme précédemment. Là encore l'interaction se traduit par une répulsion.

Dans une troisième expérience, on met en présence l'extrémité électrisée du bâton d'ébonite et celle de la tige de verre électrisée. Il en résulte, à présent, une attraction.

Ces expériences mettent en évidence deux types d'électricité :

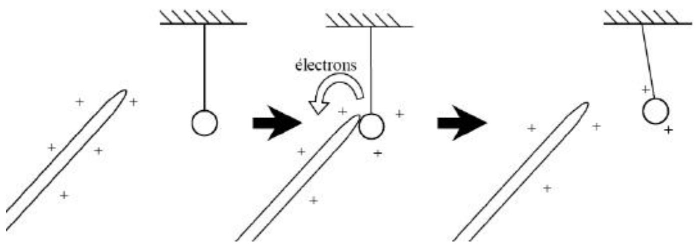
- La première apparait dans le verre : c'est **l'électricité vitreuse** à laquelle on a attribué arbitrairement un **signe positif**.
- La seconde se manifeste dans l'ébonite et d'autres résines : c'est **l'électricité résineuse** ; on lui a attribué un **signe négatif**.

En outre, ces expériences montrent que : deux corps chargés d'une électricité de même signe, positive ou négative, se repoussent ; par contre ils s'attirent s'ils portent des charges de signes contraires. Un corps qui n'est pas chargé est neutre

II.3. Autre mode d'électrisation

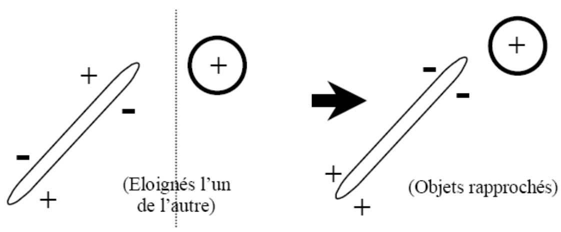
II.3.1. Electrisation par contact

En mettant en contact deux objets métalliques, l'un portant une charge électrique positive et l'autre neutre. Les électrons libres du second objet sont attirés par la charge positive du premier et certains d'entre eux passent de l'un à l'autre. Cette perte d'électrons confère à l'objet initialement neutre une charge nette positive.



II.3.2 Electrisation par influence

En rapprochant une tige métallique neutre d’un objet possédant une charge positive sans les mettre en contact. Les électrons de la tige vont se déplacer en direction de l'objet électrisé, sans toutefois s'en échapper, ainsi une charge est *induite par influence* aux deux extrémités de la tige métallique.



II.4. La charge électrique

Le concept de charge électrique : Les résultats des expériences précédentes ont amené à introduire le concept de charge électrique, ils nous permettent d’énoncer la loi suivante :

Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s’attirent si elles sont de signes contraires.

Le concept de charge ponctuelle : Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle. C’est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d’observation pour être assimilée à un point géométrique.

III.1. Quantification de la charge électrique

La charge électrique est quantifié c-à-d une charge quelconque vaut toujours un nombre entier de fois (positif ou négatif) une certaine charge dite charge élémentaire notée **e (e>0).**

« e » est la charge portée par l’électron et le proton.

Electron, protons et neutrons :
- La matière est formée d’atomes (rayon ~ 10^{-10} *m*)
- L’atome est formé

- d’un noyau (rayon ~ 10^{-50} *m*)
- d’électrons de charge **–e**

- Le noyau est formé
  - de neutrons sans charge
  - de protons de charge **+e**

Remarque : l’atome est neutre, sa charge totale est la charge des protons + la charge des neutrons

$$Q = Ze + (-Ze) = 0$$

III.2. Propriétés de la charge électrique

1. L’unité de la charge électrique est le **Coulomb [C].** Elle est : Soit **négative** ou **positive**
2. Elle est **en interaction uniquement avec les autres charges** (**attraction** – **répulsion**-
3. La charge d'un système est une grandeur **<u>extensive</u>**, c'est à dire qu'elle est la somme algébrique de toutes les charges constituant le système.

   Exemple : pour l’atome **d’hydrogène H**, $Q = +e - e = 0$.
4. La charge est une **<u>grandeur conservative</u>**. Dans un système isolé, il ne peut pas y avoir de création ou de destruction de charges. L'apparition de charges dans ce système ne peut être due qu'à l'extérieur. Une autre façon de dire la même chose est **que la charge totale contenue dans l'Univers est constante.**

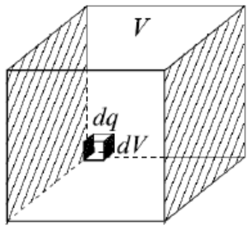
III.3. Distribution continue de charge

A l’échelle **microscopique**, on peut décrire la matière comme un ensemble de particules, considérée comme **ponctuelles**, et possédant une **charge finie multiple** de la charge **élémentaire (e). La matière apparaît discontinue** et essentiellement formé de vide et la charge électrique dans ce cas est une **distribution discontinue**.
Mais cette description ne convienne pas pour décrire un objet **de taille macroscopique**. On ne voit plus le caractère **discret** de la répartition de la charge, mais seulement la charge totale par unité de volume, on parle dans ce cas de **distribution continue de charge**..

1- Charge volumique

Pour un milieu chargé de volume **V**, la distribution de charge est définie par la donnée de la ***densité de charge volumique*** $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$.
Ainsi pour un élément de volume $d\tau$ autour d’un point M de coordonnée $M(x_M, y_M, z_M)$ on peut écrire :

$$dq = \rho d\tau = \rho(M)d\tau = \rho(x_M, y_M, z_M).d\tau$$



Et pour calculer la charge totale de ce volume il faut calculer l'intégral triple :

$$Q = \iiint \rho.d\tau$$

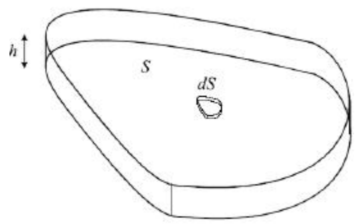
La densité de charge volumique s'exprime en ***C.m***$^{-3}$

2- Charge surfacique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'une **nappe** (**d'épaisseur négligeable**), on parle de ***densité surfacique de charge*** (**ou charge surfacique**) notée $\sigma(\vec{r}) = \sigma(x, y)$.

Pour un élément de surface dS autour d'un point M de coordonnées $M(x_M, y_M)$ on peut écrire :

$$dq = \sigma dS = \sigma(M)dS = \sigma(x_M, y_M).dS$$



La charge totale est calculée par l'intégral double :

$$Q = \iint \sigma.dS$$

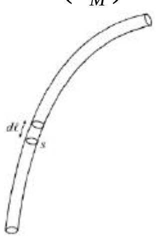
La densité surfacique de charge s'exprime en ***C.m***$^{-2}$

3- Charge linéique

Pour un milieu chargé présentant l'aspect d'un fil **de diamètre négligeable**, on défini **la *densité linéique de charge*** **(**ou **charge linéique**) elle est souvent notée $\lambda(\vec{r}) = \lambda(x)$

Pour un élément de longueur dl autour d'un point M de coordonnée $M(x_M)$ on peut écrire :

$$dq = \lambda dl = \lambda(M)dl = \lambda(x_M).dl$$



La charge totale est calculée par l'intégral simple :

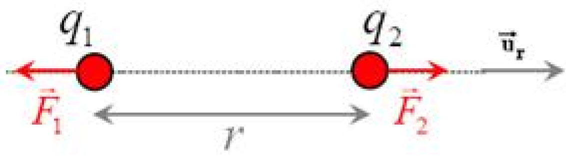
$$Q = \int \lambda.dl$$

La densité linéique de charge s'exprime en ***C.m***$^{-1}$

IV. Force de Coulomb

IV.1 Loi de Coulomb

Nous avons vu à l'électrisation par influence que deux charges ponctuelles q_1 et q_2 exercent une **influence mutuelle** l'une sur l'autre**.** Cette force obéit à la **loi de coulomb** suivante **:**



$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r}$$

Charles Augustin Coulomb
1736-1806

ε_0 est la permittivité de vide $\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\, SI\right)$;

r la distance qui sépare les deux charges ;

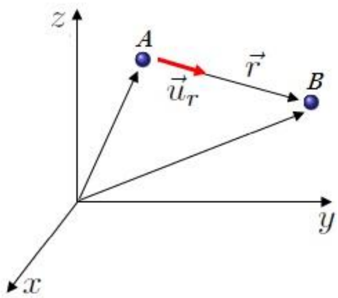
$\vec{u}_r$ un vecteur unitaire orienté de la charge 1 vers la deuxième charge.

IV.2. Force de Coulomb et force d'attraction universelle

La force de gravitation joue un rôle fondamental dans la mécanique des **objets macroscopiques** et dans la dynamique céleste. Cependant, à **l'échelle atomique** et subatomique, la force de gravitation est **négligeable**.

A titre d'exemple, comparons les deux forces entre les deux points $A(Q_A, M_A)$ et $B(Q_B, M_B)$:

Les forces exercées en B :



Force de Coulomb

$$\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A Q_B}{r^2}\vec{u}_r$$

Force d'attraction universelle

$$\vec{F}_{Newton} = -G\frac{M_A M_B}{r^2}\vec{u}_r$$

- Les deux expressions sont de même type en $\frac{1}{r^2}$
- L'intensité de la force de Coulomb >>> l'intensité de la force d'attraction de Newton. Pour deux protons (1 placé en A et l'autre en B) :

$$\frac{\vec{F}_{Newton}}{\vec{F}_{Coulomb}} = \frac{G M^2_{Proton} 4\pi\varepsilon_0}{e^2} \cong 10^{-33}$$

- Les forces de gravitation sont toujours attractives. Les charges peuvent avoir même signe ou signe contraire ; répulsion ou attraction.

Remarque : Le fait que les forces de gravitation sont toujours attractives permet aux masses de se concentrer en certains points de l'espace (terre, soleil, …). Les charges ne peuvent se concentrer :

- si de même signe ➔ répulsion
- si de signe contraire ➔ neutralisation

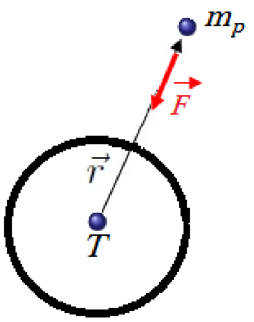
Action de force sur le mouvement.

- Force d'attraction de la terre sur une particule de masse m_p

$$\vec{F}_{Newton} = -G\frac{M_T m_p}{r^2}\vec{u}_r = m_p \vec{a}_{Newton}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_{Newton} = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}_r \neq fonction(m_p)$$

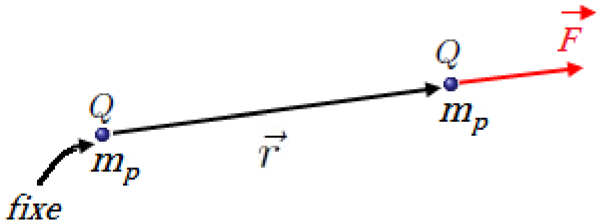


- Force de Coulomb entre 2 particules de masse m_p et de charge Q ; l'une fixe et l'autre en mouvement

$$\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}.\vec{u}_r = m_p.\vec{a}_{Coulomb}$$

$$\Downarrow$$

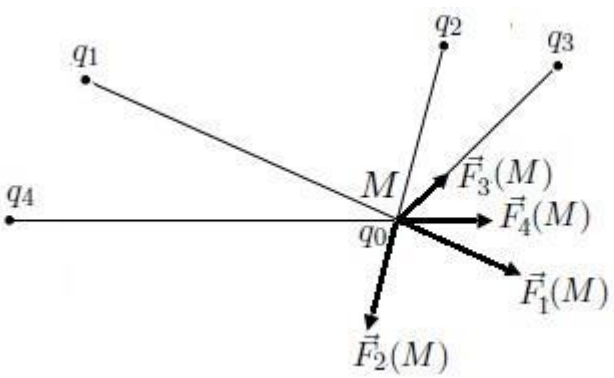
$$\vec{a}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{m_p}.\frac{\vec{u}_r}{r^2} = fonction(m_p)$$



Contrairement au cas de la force de Newton, l'accélération dans le cas d'une interaction coulombienne dépend de la masse de la particule subissant l'effet de la force.

IV.3. Force de Coulomb : ensemble de charges ponctuelles

Soit un ensemble de charges immobiles $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$:



La force exercée sur la charge q_0 par la charge q_i est :

$$\vec{F}_{i0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{i0}^{\ 2}}\vec{u}_{i0}$$

La force de Coulomb obéit au principe de superposition.
La force totale appliquée sur M par l'ensemble des charges $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

V. Exercices d'application

Exercices I.1.

Soit une sphère de rayon $\boldsymbol{R}$ dont la distribution de charge volumique n'est pas uniforme

$$\begin{cases} \rho = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \ si\, r \leq R \\ \rho = 0 \ \ si\, r > R \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \rho_0 = Cte$$

1) Calculer la charge totale Q dans la sphère.
2) Calculer la charge totale Q_0 dans la sphère si $\rho = \rho_0$.
3) Donner le rapport Q/Q_0.

Exercice I.2.

Soit 3 charge positives et égales q , forment un triangle équilatérale de côté a , on place une charge $(q' < 0)$ au centre o de ce triangle.
Calculer $\vec{F}$ la force totale soumise par les trois charges q.

Exercice I.3.

Soient 3 boules identiques A, B et C. A et B sont fixes, distantes de d et portent des charges respectives Q et Q' de même signes. La boule C peut se déplacer librement sur la droite AB ; elle est initialement neutre.
On l'amène au contact de A et on l'abandonne.
Déterminer sa position d'équilibre. On admettra que les boules sont ponctuelles.
On donne : Q = 2 10^{-8}C, Q' = 10^{-8}, d = 1m

Exercice I.4.

Soit un fil de section négligeable en forme d'un cercle de centre O et de rayon R placé dans le plan (Oxy) porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ tel que

$\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 sin\,\theta}$; $\boldsymbol{\lambda_0 = Cte > 0}$ **et** $\boldsymbol{\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})}$

P étant un point du cercle.

1) Est-ce que la distribution de charge est uniforme ? justifier.
2) Calculer la force totale exercé par le fil sur la charge $q_0 > 0$ placer au centre du fil.
3) Même question mais avec $\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 = Cte > 0}$.

Exercice I.5.

Soit 4 charges +q, +2q, -2q et +2q placées aux sommets d'un carré ABCD de côté 2a avec q>0. Soit une charge $q_0>0$ placée au centre O du carré ABCD.

1) Représenter les forces les 4 forces exercée par les 4 charges sur la charge q_0.
2) Calculer le module de la force totale exercée sur q_0.

Exercice I.6.

Soit 4 charges q_1, Q_1, q_2 et Q_2 placées aux sommets d'un carré ABCD respectivement de côté a. On suppose que $q_1=q_2=q<0$, $Q_1=Q_2=Q>0$ q>0 et la force résultante agissante sur Q_1 est nulle.

1) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{Q_2Q_1}}$.

2) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{q_1Q_1}}$
3) Calculer et présenter $\overrightarrow{F_{q_2Q_1}}$
4) Calculer Q en fonction de q.